پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی به‌کمک ماشین بردار پشتیبان (SVM) ★

«یادداشت پژوهشی»

علیرضا کردجزی[۱]   فریدون پویا نژاد[۲]   فرزاد شهابیان[۳]

چکیده *در سال‌های اخیر روش‌های یادگیری ماشین به‌طور گسترده در مدل‌سازی مسائل علوم مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش ماشین بردار پشتیبان نیز یکی از روش‌های نسبتاً جدید یادگیری ماشینی است که در مدل‌سازی مسائل مهندسی به‌طور موفقیت‌آمیز مورد استفاده قرار گرفته است. در این پژوهش از روش ماشین بردار پشتیبان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی استفاده شده است. بارهای موضعی یکی از انواع بارگذاری‌ها است که می‌تواند سبب بروز ناپایداری و گسیختگی تیرورق‌ها شود. عوامل مهم و مؤثر در ناپایداری تیرورق‌ها، از قبیل کمانش جان وبال و ایجاد لهیدگی در محل اتصال بال به جان، باعث پیچیده شدن رفتار تیرورق‌ها می‌شود. به همین دلیل نتایج روش‌های نیمه‌تجربی موجود و یا نتایج تحلیل این مسئله با روش اجزای محدود همواره با خطاهای قابل توجهی همراه بوده است و نیاز به روش‌های کارآتر هم‌چنان وجود دارد. در این مقاله از یک مجموعه داده شامل ۱۲۶ نمونه از نتایج آزمایش‌های موجود برای گسترش مدل ماشین بردار پشتیبان استفاده شده است. این داده‌ها از مقالات منتشرشده استخراج شده‌اند و هر نمونه شامل مشخصات هندسی تیرورق، مشخصات بارگذاری و مشخصات مکانیکی مصالح تیر ورق می‌باشد. مقایسهٔ نتایج حاصل از مدل‌های ارائه‌شده در این مقاله با مقادیر اندازه‌گیری‌شده، خطای متوسط کمتر از ٪۷ را بر روی نمونه‌های آزمایش نشان می‌دهد و درنهایت مقایسهٔ نتایج مدل‌های ارائه‌شده در این مقاله با یک روش سنتی متداول، برتری مدل SVM را تأیید می‌کند.*

واژه‌های کلیدی تیرورق‌ها، بارهای موضعی، ماشین بردار پشتیبان.

Modeling the Patch Load Resistance of Plate Girders Using a Support Vector Machine

A. Kordjazi   F. Pooya Nejad   F. Shahabian

Abstract *The support vector machine (SVM) is a relatively new machine learning method which is increasingly being applied to engineering problems and have yielded encouraging results. Because of complex behavior of elastoplastic of web panels of plate girders under patch loading, almost none of the proposed methods provides consistent and accurate predictions of patch load capacity. Consequently, alternative solutions are required to overcome these limitations. In this paper SVM models are developed for predicting the ultimate resistance of plate girders subjected to patch loading. The training and testing patterns of the proposed SVM models are based on well established experimental results taken from literature. Finally a comparison is made between predictions obtained from the SVM models and a traditional method for determining patch loading resistance. The comparison confirms that the SVM models developed in this paper, outperform the traditional method.*

Key Words Plate Girders; Patch Loading; Support Vector Machine.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۲/۵ تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۰/۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) استادیار گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۳) نویسنده مسئول: استاد گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.   shahabf@um.ac.ir

مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائلی که مهندسان سازه در طراحی تیرورق‌ها با آن روبه‌رو هستند، ناپایداری جان تیرورق تحت اثر آن بارهای موضعی است که در یک محدودهٔ کوچک در بین سخت‌کننده‌های عرضی بر تیر اثر می‌کنند. رفتار پیچیدهٔ تیرورق‌ها تحت اثر بار موضعی باعث شده است استخراج یک رابطهٔ کاملاً نظری برای تعیین بار نهایی تقریباً غیرممکن گردد. روش‌های نیمه‌تجربی و نتایج تحلیل به‌روش اجزای محدود برای این مسأله نیز با خطاهای قابل توجهی همراه بوده است. بدین ترتیب اختلاف نتایج حاصل از روابط تجربی-نظری و هم‌چنین نتایج حاصل از تحلیل به‌روش اجزای محدود با نتایج آزمایش‌های موجود، نیاز به روش‌های دقیق‌تر را ایجاب می‌کند.

در دهه‌های اخیر روش‌های یادگیری ماشین مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مدل‌سازی بسیاری از مسائل علوم به‌کار گرفته شده‌اند و نتایج حاصل از این روش‌ها سازگاری قابل‌توجهی با مقادیر اندازه‌گیری شده در مقیاس واقعی پدیدهٔ مورد نظر داشته است [1] و [2]. روش ماشین بردار پشتیبان (Suport Vector Machine) (SVM) نیز یکی از روش‌های یادگیری ماشین است که در دهۀ ۹۰ میلادی ارائه گردید. باوجود این‌که روش ماشین بردار پشتیبان روشی نسبتاً جدید است، اما به‌طور گسترده در مدل‌سازی پدیده‌های مهندسی به‌ویژه مهندسی عمران مورد استفاده قرار گرفته است و نتایج رضایت‌بخشی به‌همراه داشته است [3,4,5].

در این پژوهش از روش ماشین بردار پشتیبان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌ها تحت اثر بارهای موضعی برمبنای نتایج حاصل از آزمایش تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی استفاده شده است. اهداف اصلی این مقاله عبارتند از: ۱) ارائه و گسترش مدلی قابل اطمینان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی بااستفاده از روش ماشین بردار پشتیبان، ۲) ارزیابی اثر توابع کرنل مختلف و مقادیر پارامترهای طراحی آنها بر کارایی مدل‌های ماشین بردار پشتیبان و ۳) مقایسۀ نتایج مدل‌های ارائه‌شده در این مقاله با یک روش سنتی متداول در پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌ها.

ماشین بردار پشتیبان

روش ماشین بردار پشتیبان یکی از روش‌های یادگیری ماشینی است. این روش دهۀ ۹۰ میلادی توسط واپنیک و همکارانش ارائه گردید [6]. برای کمینه کردن خطای مدل در این روش از اصولی که با عنوان کمینه‌سازی ریسک ساختاری (Structural Risk Minimization) (SRM) شناخته می‌شوند، استفاده شده است. در حالی‌که سایر روش‌ها (مانند روش شبکه‌های عصبی مصنوعی) از اصول کمینه‌سازی ریسک تجربی (Empirical Risk Minimization) (ERM) بهره می‌برند [3,7].

به‌طور کلی ماشین بردار پشتیبان در مسائل طبقه‌بندی دو یا چند گروهه و رگرسیون مورد استفاده قرار می‌گیرد. مانند بسیاری از روش‌های یادگیری ماشینی، در این روش نیز فرآیند ساخت مدل شامل دو مرحلۀ آموزش و آزمایش می‌باشد. در انتهای فاز آموزش قابلیت تعمیم‌یابی مدل آموزش داده‌شده با استفاده از داده‌های آزمایش مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در واقع ماشین بردار پشتیبان، تابع رگرسیون را با به‌کارگیری یک دسته تابع خطی تخمین می‌زند. در این تابع، انحراف مقادیر پیش‌بینی شده از مقدار واقعی به‌میزان ε مجاز است (تابع تلفات (loss function)). در نهایت بهترین جواب به‌کمک اصول کمینه‌سازی ریسک ساختاری برروی ریسک اندازه‌گیری شده توسط تابع تلفات مورد استفاده، ارائه می‌شود [5].

حل مسئلۀ رگرسیون در SVM برروی یک مجموعه از داده‌ها به‌صورت $\{(x_1, y_1),.....(x_1, y_1) \in R^m, y \in R\}$ یک تابع خطی به‌شکل رابطۀ (۱) می‌باشد که بتواند مقادیر خروجی را بر مبنای ورودی‌ها تخمین بزند.

$$f(x)=\langle w.x\rangle+b \qquad (۱)$$

در مجموعه داده‌ها و رابطهٔ (۱)، l =تعداد نمونه، x= بردار ورودی ($x\in R^m$)، y= مقدار خروجی ($y\in R$)، w= بردار وزن ($w\in R^m$)، b= بایاس ($b\in R$) می‌باشند.

با استفاده از تابع تلفات، پارامترهای کنترل کنندهٔ تابع پاسخ بهینه در SVM؛ یعنی تابع وزن و بایاس، با حل مسئلهٔ بهینه‌سازی زیر حاصل می‌شوند [7]:

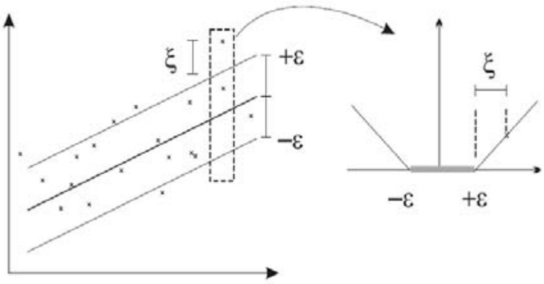
$$\text{Minimize}\quad \Phi(w,\zeta^*,\zeta)=\frac{\|w\|^2}{2}+C\left(\sum\zeta_i^*+\sum\zeta\right)$$

(۲-الف)

$$\text{Subject to}\quad \begin{array}{l} y_i-((w.x_i)+b)\le\varepsilon+\zeta_i\\ ((w.x_i)+b)-y_i\le\varepsilon+\zeta_i^*\\ \zeta_i,\zeta_i^*\ge 0\\ i=1,2,\ldots,l \end{array}$$

(۲-ب)

در این رابطه، ε خطای مورد قبول در تابع تلفات (شکل ۱)، $\|w\|^2$ نرم بردار وزن (مقدار آن $\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)$ می‌باشد)، ζ,ζ^*= متغیرهای slack هستند که به‌همراه تابع تلفات در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ تابع تلفات و متغیرهای آن [7]

براساس تئوری لاگرانژ، مسئلهٔ بهینه‌سازی رابطهٔ (۲) قابل تبدیل به تابع لاگرانژ می‌باشد:

$$L(\alpha^*,\alpha)=-\varepsilon\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i^*+\alpha_i)+\sum_{i=1}^{l}y_i(\alpha_i^*-\alpha_i)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i^*-\alpha_i)(\alpha_j^*-\alpha_j)(x_i.x_j)$$

(۳)

با بیشینه شدن تابع فوق تحت قیدهای زیر، مقادیر ضرایب α,α^* به‌دست می‌آیند. این ضرایب، ضرایب لاگرانژ نامیده می‌شوند.

$$\begin{cases}\sum\alpha_i^*=\sum\alpha_i\\ 0\le\alpha_i^*\le C & \text{for}\quad i=1,2,\cdots,l\\ 0\le\alpha_i\le C\end{cases}$$

(٤)

در این روابط، L = تابع لاگرانژ، C = پارامتر جریمه یا پارامتر تنظیم می‌باشد.

نکتهٔ قابل توجه آن است که مسئلهٔ بهینه‌سازی فوق قابل حل به‌کمک روش‌های (QuadraticProgramming Method) (QP) می‌باشد، در نتیجه رسیدن به بیشینهٔ (یا کمینه) مطلق نیز قطعی خواهد بود و خطر به دام افتادن در بیشینهٔ (یا کمینه) محلی وجود ندارد [7].

بدین ترتیب پاسخ نهایی به‌صورت زیر خواهد بود [3]:

$$w_0=\sum_{\text{supportvectors}}(\alpha_i^*-\alpha_i)x_i \qquad (۵)$$

$$b_0=-\left(\tfrac{1}{2}\right)w_0.[x_r+x_s] \qquad (٦)$$

$$f(x)=\sum_{\text{supportvectors}}(\alpha_i^*-\alpha_i)(x_i-x)+b_0 \qquad (۷)$$

در این روابط، x_i بردار ورودی که مدل با آن آموزش داده می‌شود، x بردار ورودی، x_r,x_s= دو بردار پشتیبان، w_0 بردار وزن بهینه، b_0 مقدار بهینه بایاس می‌باشند.

داده‌هایی که ضرایب لاگرانژ متناظر با آنها غیرصفر باشد، به‌عنوان بردار پشتیبان شناخته می‌شوند. از نظر

هندسی این داده‌ها دارای خطای پیش‌بینی بزرگتر از ε± هستند، بنابراین بردارهای پشتیبان درون بازهٔ ε± قرار نمی‌گیرند و مقدار ε تعداد بردارهای پشتیبان را کنترل می‌کند [5]. با توجه به رابطهٔ (۵) مشاهده می‌شود که داده‌هایی که ضریب لاگرانژ آنها صفر هستند، نقشی در پاسخ نهایی ندارند، به سخن دیگر بردارهای پشتیبان هستند که تابع رگرسیون نهایی با پاسخ بهینه را تعیین می‌کنند.

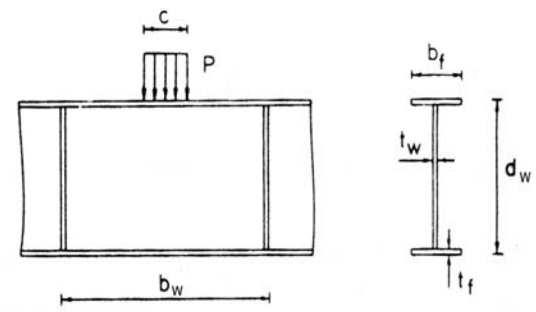
برای ساخت مدل ماشین بردار پشتیبان، پارامترهای C و ε توسط کاربر تعریف می‌شوند. پارامتر C یک پارامتر تنظیمی است و می‌تواند مقادیر صفر تا بی‌نهایت را بپذیرد. وقتی به این پارامتر مقادیر بزرگی اختصاص داده شود، SVM اجازه وقوع خطا در داده‌های آموزش نمی‌دهد و نتیجهٔ حاصل یک مدل پیچیده خواهد بود، لذا قابلیت تعمیم‌یابی مدل کاهش می‌یابد. از طرف دیگر وقتی که C به‌سمت صفر میل کند، مدل می‌تواند خطای زیادی را بپذیرد، درنتیجه پیچیدگی مدل کمتر خواهد بود [5,8].

پارامتر ε نیز می‌تواند مقادیر صفر تا بی‌نهایت را بپذیرد. مقدار این پارامتر در وضعیت بردارهای پشتیبان و درنتیجه کارایی مدل بسیار مؤثر است. هر چند که انتخاب مقادیر بسیار بزرگ ε سبب کاهش تعداد بردار-های پشتیبان می‌شود- و مطلوب نیز چنین است- اما رسیدن به این هدف با عریض کردن بازهٔ ε نادرست است. از طرف دیگر مقادیر بسیار کوچک این پارامتر، موجب می‌شود تا تعداد زیادی بردار پشتیبان انتخاب شود و احتمال خطر بیش‌آموزش (Overfitting) شدن افزایش می‌یابد [5].

مسئلهٔ رگرسیون خطی در SVM به‌آسانی قابل گسترش به رگرسیون غیرخطی است. بدین منظور از توابع کرنل استفاده می‌شود. توابع کرنل، داده‌ها را به یک فضای ویژگی (Feature Space) نگاشت می‌کنند که در آن فضا امکان استفاده از رگرسیون خطی وجود داشته-باشد. تاکنون توابع کرنل گوناگونی معرفی شده‌اند که در این میان می‌توان به کرنل‌های چندجمله‌ای (Polynomial) و پایه شعایی (function Radial Basis) اشاره کرد [7].

تیرورق‌ها

تیرورق‌ها از سطوح بزرگی از ورق با ضخامت کم به‌عنوان جان تیرورق تشکیل شده‌اند. این سطوح از یک‌سو بین بال‌های بالا و پایین و از سوی دیگر بین سخت‌کننده‌های عرضی (قائم) محصور می‌باشند (شکل ۲).



شکل ۲ نمایش تیرورق. b_w عرض جان تیرورق، d_w ارتفاع جان تیرورق، t_w ضخامت جان، b_f عرض بال، t_f ضخامت بال، c عرض بارگذاری

پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌ها برای جلوگیری از ناپایداری ورق جان تحت اثر بارهایی که در یک محدودهٔ کوچک در بین سخت کننده‌های عرضی بر تیر اثر می‌کنند (بارهای موضعی)، یکی از مهم‌ترین مشکلاتی است که مهندسان با آن روبه‌رو هستند. عوامل مهم مؤثر در ناپایداری تیرورق‌ها از قبیل کمانش جان وبال و ایجاد لهیدگی در محل اتصال بال به جان باعث پیچیده شدن رفتار تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی می‌شود. این پدیده باعث شده است که به‌دست آوردن

یک رابطهٔ کاملاً نظری برای تعیین بار نهایی غیرممکن گردد. محققانی که در این زمینه فعالیت داشته‌اند، کم و بیش از نتایج و مشاهدات تجربی خود استفاده کرده و رابطه‌هایی را پیشنهاد کرده‌اند که در بهترین حالت‌ها خطای حداکثری بیش از ۲۰ درصد داشته است. تحلیل به‌روش اجزای محدود نیز به‌علت عدم امکان صحیح اعمال تغییر شکل‌ها و تنش‌های اولیهٔ ناشی از ساخت تیرورق بسیار مشکل و با خطا همراه بوده است [1] و [۲].

کچام و درافین در سال ۱۹۳۲ و هم‌چنین لیز و گودفری در سال ۱۹۳۵ جزء اولین کسانی بودند که آزمایش‌هایی را به‌منظور بررسی مقاومت تیرورق‌ها تحت اثر بارهای موضعی انجام دادند [7]. از سال ۱۹٦۰ به بعد افراد زیادی نظیر گرانهلم، برگفلت، اسکالود، راکی و رابرتز در این زمینه تحقیق و بررسی‌هایی را انجام داده‌اند. مجموعهٔ کاملی از روش‌های پیشنهادی و نتایج آزمایش‌های انجام‌شده توسط این محققان جمع‌آوری و گزارش گردیده است [9,10,11].

طراحی مدل

داده‌های مورد استفاده. در این مقاله برای گسترش مدل ماشین بردار پشتیبان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی از یک مجموعه داده شامل ۱۲٦ نمونه استفاده شده است. هر نمونه در برگیرندهٔ مشخصات هندسی و مکانیکی تیرورق و نتایج آزمایشگاهی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی می-باشد. داده‌های مورد استفاده در این مقاله از پژوهش‌های منتشر شده استخراج شده‌اند [10,12,13].

دست‌یابی به یک مدل کارآمد برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی نیازمند شناسایی پارامترهای مؤثر در مقاومت نهایی این عناصر می‌باشد. با بررسی نتایج مطالعات تئوری و آزمایشگاهی در زمینه رفتار تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی [10,12,13]، مشاهده می‌شود که هندسهٔ تیرورق، عرض بارگذاری و مشخصات مکانیکی مصالح تیرورق (شامل مدول یانگ و تنش تسلیم مصالح) مهم‌ترین پارامترها در تعیین مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی هستند.

از این‌رو، پارامترهای ورودی مدل SVM به‌شکل زیر درنظر گرفته شده‌اند:

۱) عرض جان تیرورق (b_w)

۲) ارتفاع جان تیرورق (d_w)

۳) ضخامت جان (t_w)

٤) عرض بال (b_f)

٥) ضخامت بال (t_f)

٦) عرض بارگذاری (c)

۷) حد جاری شدن جان (σ_w)

۸) حد جاری شدن بال (σ_f).

تنها خروجی این مدل نیز مقاومت نهایی تیرورق (P_u) است.

آماده‌سازی داده‌ها. برای گسترش یک مدل ماشین بردار پشتیبان، داده‌ها به دو دستهٔ آموزش و آزمایش تقسیم‌بندی می‌شوند. در این مقاله تعداد ۱۰۰ نمونه از کل داده‌ها (حدود ۸۰٪) برای آموزش و بقیهٔ داده‌ها شامل ۲٦ نمونه برای ارزیابی کارایی مدل مورد استفاده قرار گرفته شده است. سعی شده است تا مشخصات آماری هر یک از پارامترهای ورودی مجموعهٔ آموزش و مجموعهٔ آزمایش نظیر میانگین و انحراف معیار به یکدیگر نزدیک باشند. در جدول (۱) مشخصات آماری داده‌ها شامل میانگین، انحراف استاندارد، کمینه و بیشینه و دامنهٔ داده‌ها، ارائه شده است.

جدول ۱ مشخصات آماری مجموعه داده‌های مورد استفاده در گسترش مدل SVM

متغیرهای مدل و مجموعه داده‌ها	شاخص‌های آماری				
	میانگین	انحراف استاندارد	کمینه	بیشینه	دامنه
b_w (mm)					
مجموعه آموزش	1253.24	1460.66	300	9800	9500
مجموعه آزمایش	1237.69	838.79	400	3000	2600
d_w (mm)					
مجموعه آموزش	585.25	225.66	250	1000	750
مجموعه آزمایش	650.38	221.48	250	1000	750
t_w (mm)					
مجموعه آموزش	2.89	1.42	0.99	9.95	8.96
مجموعه آزمایش	2.79	1.58	0.99	9.95	8.96
b_f (mm)					
مجموعه آموزش	142.51	70.37	45	300	255
مجموعه آزمایش	160.96	68.40	50	300	250
t_f (mm)					
مجموعه آموزش	10.72	5.69	3.05	30.5	27.45
مجموعه آزمایش	10.83	5.03	3.05	24.6	21.55
c (mm)					
مجموعه آموزش	70.20	43.46	30	200	170
مجموعه آزمایش	68.46	49.69	40	200	160
σ_w (N/mm^2)					
مجموعه آموزش	255.70	41.93	178	354	176
مجموعه آزمایش	255.88	46.44	192	354	162
σ_f (N/mm^2)					
مجموعه آموزش	273.42	25.42	221	347	126
مجموعه آزمایش	271.15	24.16	221	305	84
P_{ex}(kN)					
مجموعه آموزش	106.20	114.19	8.45	787	778.55
مجموعه آزمایش	104.79	134.85	10.8	738	727.2

پیش از شروع آموزش مدل، داده‌ها به بزرگ‌ترین مقدار متناظرشان تقسیم شده‌اند تا به مقدارهای بین صفر و یک مقیاس شوند. به این ترتیب اثر مقیاس واقعی (Absolute Scale) کمینه شده و همه ورودی‌ها تقریباً در یک دامنه قرار گرفته‌اند [14].

آموزش مدل و انتخاب معیارهای ارزیابی مدل. به‌منظور گسترش مدل‌های غیرخطی SVM از توابع کرنل پایه شعاعی(یا RBF)، چندجمله‌ای و تابع کرنل پیرسون (Pearson VII kernel function) استفاده می‌شود. این کرنل‌ها در روابط زیر تعریف شده‌اند [3].

$$K(x, x_i) = \exp\left(-|x - x_i|^2 / 2\sigma^2\right) \qquad (۸)$$

$$K(x, x_i) = 1 \Big/ \left[1 + \left(2\sqrt{\|x_i - x_j\|^2}\,\sqrt{2^{(1/\omega)} - 1} / \sigma'\right)^2\right]^{\omega} \qquad (۹)$$

$$K(x, x_i) = (\langle x, x_i \rangle + 1)^d \qquad (۱۰)$$

در روابط بالا، σ= عرض کرنل با پایه شعاعی، σ'= عرض کرنل پیرسون، ω= فاکتور دنباله در تابع کرنل پیرسون، d= توان چند جمله‌ای می‌باشند.

مقادیر پارامترهای کرنل‌های فوق توسط کاربر تعیین می‌شوند.

در این پژوهش برای آموزش مدل و ارزیابی آن بر روی داده‌های آزمایش از جعبه‌ابزار SVM در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. پس از اتمام فرآیند آموزش مدل، عملکرد آن توسط داده‌هایی که در فرآیند آموزش استفاده نشده‌اند (داده‌های آموزش) ارزیابی می‌شوند. نتایج ارزیابی عملکرد پیش‌بینی مدل SVM به‌کمک شاخص های آماری نظیر ضریب هم-بستگی (Coefficient of Correlation) و ریشهٔ میانگین مربعات خطاها (Root Mean Square Error) (RMSE) ارائه شده است. ضریب هم‌بستگی معیاری است برای اندازه‌گیری هم‌بستگی نسبی میان مقادیر پیش‌بینی‌شده و اندازه‌گیری‌شده و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [15].

$$R = \frac{C_{y_j d_j}}{\sigma_{y_j} \sigma_{d_j}} \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$C_{yjdj} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})(d_j - \bar{d}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j d_j - \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{j=1}^{n} d_j}{n}\right) \qquad (۱۱)$$

$$\sigma_{yj} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2}{n-1}} \qquad (۱۲)$$

$$\sigma_{dj} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(d_j - \bar{d})^2}{n-1}} \qquad (۱۳)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{n} \qquad (۱٤)$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j}{n} \qquad (۱۵)$$

در این رابطه‌ها، y_j = مقدار خروجی اندازه‌گیری شده (مطلوب)، d_j= مقدار خروجی مدل (پیش‌بینی شده)، $C_{y_j d_j}$ = کواریانس میان خروجی مدل و خروجی اندازه‌گیری شده، σ_{y_j} = انحراف استاندارد خروجی اندازه‌گیری شده، σ_{d_j} = انحراف استاندارد خروجی مدل، $\bar{y}$ = میانگین خروجی‌های اندازه‌گیری شده، $\bar{d}$ = میانگین خروجی‌های مدل، n= تعداد داده‌ها می‌باشند.

در صورتی‌که مقدار قدر مطلق ضریب هم‌بستگی بزرگ‌تر از ۰/۸ باشد، بنا بر اسمیت [16]، هم‌بستگی قوی میان دو مجموعه داده وجود دارد. از آن‌جا که در محاسبه RMSE، خطاهای بزرگ‌تر اهمیت بیشتری نسبت به خطاهای کوچک می‌یابند، به متداول‌ترین معیار برای اندازه‌گیری خطا تبدیل شده‌اند [15,17].

نتایج

در این پژوهش سه مدل ماشین بردار پشتیبان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی ارائه شده است. مدل اول با استفاده از یک تابع کرنل پایهٔ شعاعی(RBF) و مدل‌های دیگر به‌کمک توابع کرنل پیرسون و چندجمله‌ای گسترش داده می‌شود. برای رسیدن به مدل بهینه، با ترکیب‌های مختلفی از پارامترهای C، ε و پارامترهای تابع کرنل (σ برای کرنل RBF، σ' و ω در تابع پیرسون و d در کرنل چندجمله‌ای)، مدل ماشین بردار پشتیبان برروی داده‌های آموزش گسترش داده شده است. برای ارزیابی کارایی این مدل‌ها، از مجموعه داده‌های آزمایش، استفاده شده است.

نتایج ارزیابی هر یک از مدل‌ها به‌ازای تغییرات مقادیر ε در حالی‌که سایر پارامترها ثابت هستند در جدول (۲) ارائه شده است. این جدول در برگیرندهٔ تعداد بردارهای پشتیبان برروی مجموعهٔ آموزش و مقادیر ضریب هم‌بستگی و ریشهٔ دوم میانگین مربعات خطاها برروی مجموعه داده‌های آزمایش می‌باشد. مشاهده می‌شود که با افزایش ε، تعداد بردار پشتیبان کاهش می‌یابد، اما همان‌طور که گفته شده است، در

فرآیند رسیدن به پاسخ بهینه، کاهش تعداد بردار پشتیبان با افزایش مقدار ε تا حد معینی مؤثر است و رسیدن به کمترین خطا در پیش‌بینی و بیشترین هم‌بستگی با مقادیر واقعی الزاماً با افزایش ε برآورده نمی‌گردد. به‌طور مشابه با جدول (۲)، نتایج ارزیابی مدل‌های گوناگون به‌ازای تغییرات پارامتر جریمه (*C*) در جدول (۳) خلاصه شده است.

با توجه به جدول‌های (۲) و (۳)، در میان مدل‌هایی که با تابع کرنل پیرسون گسترش داده شده‌اند، مدل با C=۵۰۰، ε=۰/۰۰٦ و پارامترهای کرنل ω=۳ و σ'=۵ کمترین مقدار RMSE(=۵/۷۹kN) را به‌ازای داده‌های آزمایش نشان می‌دهد و درنتیجه در میان مدل‌های گسترش داده با این کرنل، مدل بهینه می‌باشد.

با بررسی مدل‌های گسترش‌یافته با تابع کرنل پایه شعاعی، مشاهده می‌شود مدلی که در آن عرض تابع کرنل (σ) برابر با ۱/۵ است و سایر پارامترهای مدل (یعنی ε و C) به‌ترتیب ۰/۰۰۷ و ۱۵۰ انتخاب شده‌اند، با داشتن کم‌ترین مقدار خطا (RMSE=۵/۸٦ kN) و بیشترین مقدار ضریب هم‌بستگی(R=۰/۹۹۹) بر روی داده‌های آزمایش، بهترین عملکرد را نشان می‌دهد. درنهایت در مدل‌هایی که بااستفاده از تابع کرنل چندجمله‌ای گسترش داده شده است، مقدار بهینهٔ درجهٔ تابع کرنل چندجمله‌ای ۱/۹ تعیین می‌شود و کاراترین مدل به‌ازای مقادیر ε =۰/۰۰۵ و C=۲۰ بر روی داده‌های آزمایش، ضریب هم‌بستگی R=۰/۹۹۹ و RMSE=٦/۲۱ kN را ارائه می‌دهد.

جدول ۲ ارزیابی مدل به ازای مقادیر گوناگون پارامتر ε

تابع کرنل پایه‌شعاعی C=150 & σ=1.5				تابع کرنل پیرسون C=500; ω= 3 & σ' =5				تابع کرنل چندجمله‌ای C=20 & d=2.5			
ε	Nsv	R	RMSE	ε	Nsv	R	RMSE	ε	Nsv	R	RMSE
0.001	93	0.999	7.59	0.001	98	0.999	7.09	0.001	95	0.998	8.04
0.002	90	0.999	7.33	0.002	92	0.999	6.74	0.002	91	0.998	7.81
0.003	86	0.999	6.80	0.003	87	0.999	6.44	0.003	87	0.999	7.59
0.004	78	0.999	6.17	0.004	76	0.999	6.10	0.004	80	0.999	6.98
0.005	73	0.999	6.26	0.005	74	0.999	6.10	0.005	75	0.999	6.21
0.006	69	0.999	6.17	0.006	74	0.999	5.79	0.006	74	0.999	6.47
0.007	64	0.999	5.86	0.007	68	0.999	5.92	0.007	69	0.999	6.97
0.008	66	0.999	6.10	0.008	66	0.999	6.47	0.008	67	0.999	7.53
0.009	61	0.999	6.90	0.009	62	0.999	7.02	0.009	67	0.998	8.29
0.01	59	0.998	7.58	0.01	59	0.998	7.64	0.01	64	0.998	9.72
0.02	36	0.997	11.90	0.02	37	0.997	10.92	0.02	39	0.997	13.17
0.03	25	0.993	17.36	0.03	26	0.993	16.94	0.03	29	0.993	19.10
0.04	17	0.989	19.73	0.04	15	0.990	18.73	0.04	17	0.991	18.39
0.05	15	0.982	25.11	0.05	13	0.984	23.92	0.05	12	0.989	20.32
0.06	11	0.975	29.41	0.06	10	0.977	28.53	0.06	9	0.989	24.42
0.07	5	0.974	30.44	0.07	5	0.973	31.78	0.07	9	0.989	30.23
0.08	6	0.974	32.93	0.08	5	0.973	34.47	0.08	9	0.988	37.60
0.09	6	0.975	37.43	0.09	5	0.974	39.21	0.09	7	0.988	45.29
0.1	8	0.975	43.41	0.1	5	0.974	45.36	0.1	8	0.988	53.27

Nsv، R و RMSE به‌ترتیب تعداد بردارهای پشتیبان، ضریب هم‌بستگی و ریشهٔ دوم میانگین مربعات خطاها می‌باشند.

جدول ۳ ارزیابی مدل به‌ازای مقادیر گوناگون پارامتر C

تابع کرنل پایه‌شعاعی ε=0.007 & σ=1.5				تابع کرنل پیرسون ε=0.006 ; ω= 3 & σ' =5				تابع کرنل چندجمله‌ای ε=0.005 & d=2.5			
C	Nsv	R	RMSE	C	Nsv	R	RMSE	C	Nsv	R	RMSE
0.001	94	-0.393	146.77	0.001	95	-0.379	146.51	0.001	99	0.707	120.34
0.01	98	0.550	134.37	0.01	98	0.530	135.25	0.01	81	0.983	62.92
0.1	84	0.902	99.24	0.1	92	0.834	111.25	0.1	76	0.998	10.38
0.5	67	0.976	66.66	0.5	77	0.965	76.12	0.5	74	0.998	8.33
1	65	0.983	52.52	1	70	0.979	62.78	1	74	0.998	8.75
5	73	0.998	12.12	5	73	0.994	27.68	5	80	0.998	9.05
10	67	0.999	8.58	10	75	0.998	11.85	10	78	0.998	8.10
15	67	0.999	8.00	15	73	0.998	9.55	15	74	0.999	6.83
20	67	0.999	7.65	20	72	0.999	8.64	20	75	0.999	6.21
25	64	0.999	7.41	25	69	0.999	8.22	25	77	0.999	6.61
50	65	0.999	6.97	50	71	0.999	7.55	50	78	0.998	7.50
80	65	0.999	6.58	80	71	0.999	7.56	80	74	0.998	9.36
100	64	0.999	6.51	100	70	0.999	7.32	100	73	0.997	10.55
125	63	0.999	6.05	125	68	0.999	7.02	125	74	0.996	11.72
150	64	0.999	5.86	150	69	0.999	6.60	150	77	0.996	11.87
175	68	0.999	5.88	175	68	0.999	6.31	175	76	0.996	12.13
200	68	0.999	5.91	200	67	0.999	6.24	200	77	0.996	12.41
300	68	0.999	6.25	300	69	0.999	6.14	300	75	0.994	14.86
400	66	0.999	6.50	400	70	0.999	5.84	400	74	0.993	16.08
500	69	0.999	6.95	500	74	0.999	5.79	500	78	0.992	17.27
600	68	0.998	7.43	600	74	0.999	5.95	600	77	0.992	18.25
700	66	0.998	7.99	700	71	0.999	6.07	700	79	0.991	19.55
1000	65	0.997	10.25	1000	73	0.999	6.35	1000	81	0.987	22.86

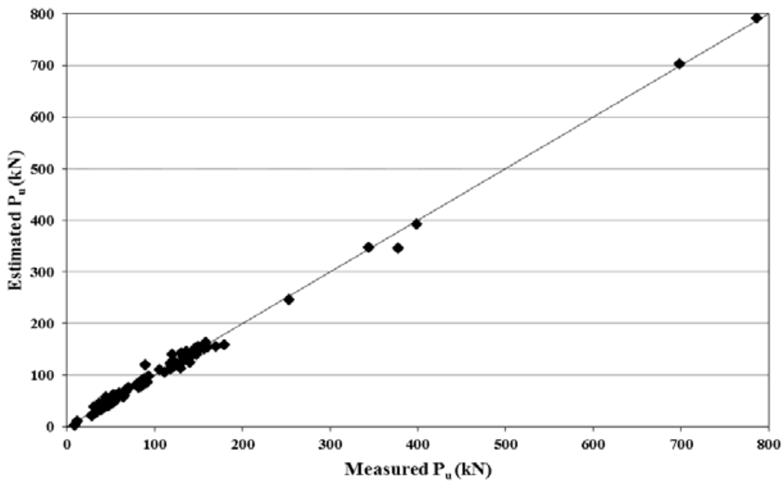
جدول ٤ مقادیر پارامترهای مدل‌های بهینه و تعداد بردارهای پشتیبان

مدل (توجه به کرنل مورد استفاده با)	کرنل پارامتر	مقدار بهینهC	مقدار بهینهε	بردارهای پشتیبان تعداد
تابع کرنل پایه‌شعاعی	σ = 1.5	150	0.007	64
تابع کرنل پیرسون	σ' =5; ω= 3	500	0.006	74
تابع کرنل چندجمله‌ای	d=2.5	20	0.005	75

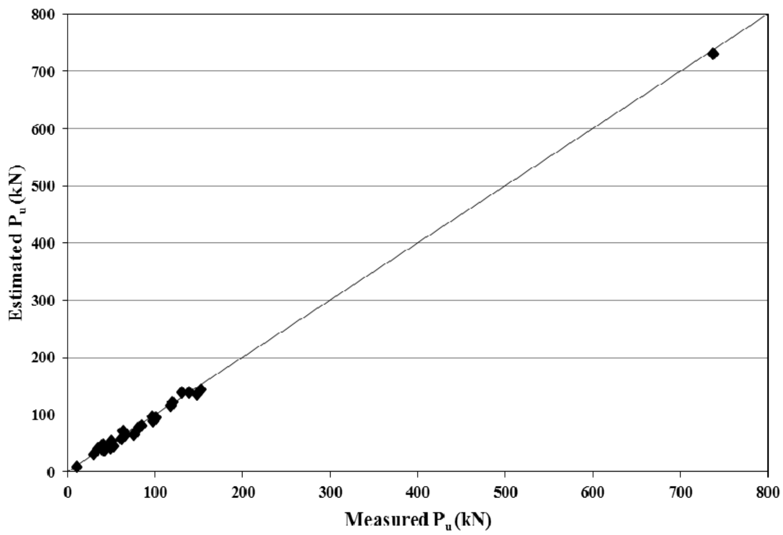
جدول ۵ نتایج عملکرد مدل‌های بهینه بر مجموعه داده‌های آموزش و آزمایش در قالب ضریب هم‌بستگی وRMSE

مدل (توجه به کرنل مورد استفاده)	مجموعهٔ آموزش		مجموعهٔ آزمایش	
	R	RMSE (kN)	R	RMSE (kN)
تابع کرنل پایه‌شعاعی	0.998	7.73	0.999	5.86
تابع کرنل پیرسون	0.998	7.14	0.999	5.79
تابع کرنل چندجمله‌ای	0.998	7.75	0.999	6.21

نتایج فوق شامل مقادیر پارامترهای طراحی مدل‌های بهینه برای هر تابع کرنل و تعداد بردارهای پشتیبان متناظر با آنها در جدول (٤) خلاصه شده است. هم‌چنین نتایج عملکرد مدل‌های بهینه بر مجموعه داده‌های آموزش و آزمایش در جدول (٥) نشان داده شده است. هم‌چنین نمودار مقادیر مقاومت نهایی اندازه‌گیری‌شده در برابر مقدار پیش‌بینی‌شده به‌وسیلهٔ مدل‌های گسترش یافته با هر یک از توابع کرنل، در شکل‌های (۳) تا (۵) نشان داده شده است. با بررسی نتایج مشاهده می‌شود که مدل‌های گسترش‌یافته به‌روش ماشین بردار پشتیبان با دقت بسیار خوبی مقادیر مقاومت نهایی تیرورق‌ها را در محدودهٔ داده‌های مورد استفاده تخمین می‌زنند. هرچند اختلاف میان کارایی مدل‌های مختلف ارائه شده در این پژوهش بسیار ناچیز است، اما نتایج نشان می‌دهند که مدل‌های گسترش داده‌شده با کرنل‌های پیرسون و RBF کارایی بهتری نسبت به مدل ارائه‌شده با کرنل چندجمله‌ای ارائه می‌دهند.

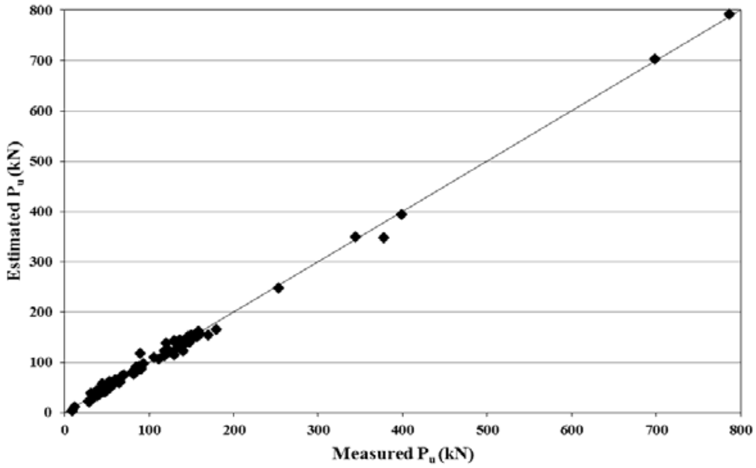


(الف)

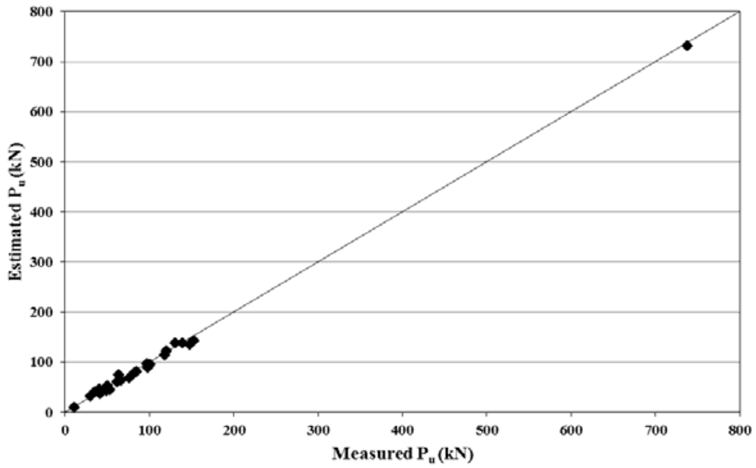


(ب)

شکل ۳ مقاومت نهایی اندازه‌گیری شده دربرابر پیش‌بینی‌شده توسط مدل SVM گسترش داده‌شده به‌کمک تابع کرنل پایه شعاعی: الف) برروی داده‌های مجموعهٔ آموزش، ب) برروی مجموعه داده‌های آزمایش

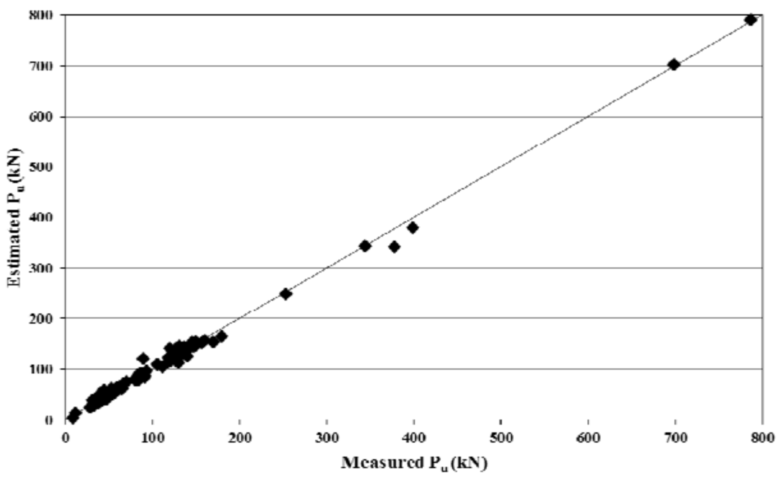


(الف)

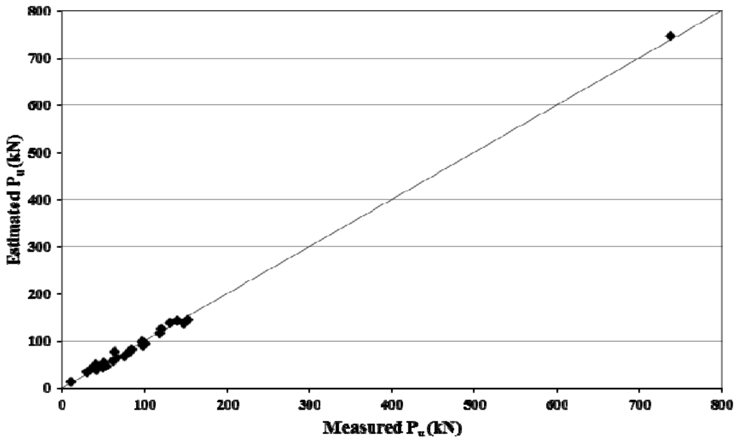


(ب)

شکل ٤ مقاومت نهایی اندازه‌گیری شده دربرابر پیش‌بینی‌شده توسط مدل SVM گسترش داده‌شده به‌کمک تابع کرنل پیرسون:
الف) برروی داده‌های مجموعهٔ آموزش، ب) برروی مجموعه داده‌های آزمایش



(الف)



(ب)

شکل ۵ مقاومت نهایی اندازه‌گیری شده در برابر پیش‌بینی‌شده توسط مدل SVM گسترش داده‌شده به‌کمک تابع کرنل چندجمله‌ای:
الف) برروی داده‌های مجموعهٔ آموزش، ب) برروی مجموعه داده‌های آزمایش

جدول ٦ مشخصات نمونه‌های آزمایش و مقادیر مقاومت نهایی پیش‌بینی‌شده توسط مدل SVM و روش رابرتز و نیوآرک [10]

Sample No.	b_w (mm)	d_w (mm)	t_w (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	c (mm)	σw (N/mm^2)	σf (N/mm^2)	P_{ex} (kN)	P_{up} (kN)	
										SVM PVII kernel RMSE=5.79	Roberts and Newark (1997) RMSE=30.25
1	2400	700	3.26	250	11.9	100	326	232	139.3	139.12	138.50
2	2400	500	2	100	12	180	294	294	61.8	60.60	57.10
3	1000	1000	2.5	200	10.09	100	299	253	63.76	75.05	78.56
4	2000	1000	3	200	10	100	297	253	98.1	89.22	108.14
5	2000	1000	3	200	10	200	297	253	117.72	114.91	111.27
6	500	500	2	50	24.6	50	243	225	76.03	68.57	59.10
7	600	600	3.63	50	10.1	60	282	279	148	135.38	149.17
8	800	800	2.05	300	15.5	40	210	285	66	64.72	50.89
9	600	800	3	250	12	40	245	285	96.8	97.58	101.21
10	1020	680	2	120	5	40	354	292	50.17	53.05	48.52
11	800	300	2	120	5	40	285	286	49	42.86	45.11
12	400	400	2	120	5	40	285	286	53	44.86	44.40
13	800	600	3	250	12	40	328	286	120	121.94	117.87
14	600	250	3.05	149	6.75	50	221	279	100.7	95.25	93.65
15	600	500	0.99	149	6.75	50	192	279	10.8	9.90	11.13
16	600	500	3.05	149	20.06	50	221	305	130.6	137.91	113.32
17	600	750	2.12	149	3.05	50	224	221	30	32.45	38.60
18	600	750	3.05	149	11.75	50	221	305	99.55	95.84	98.95
19	760	380	2.99	80	6.25	50	245	298	84.1	80.91	90.39
20	500	500	9.95	150	10.05	50	247	250	738	731.20	884.71
21	2400	600	2	100	6	40	206	280	35	39.86	38.72
22	3000	400	2	100	12	40	205	278	40.7	41.84	45.83
23	1100	800	2	100	12	40	205	277	40.5	46.02	45.24
24	2000	1000	3	200	19.78	200	300	231	152.05	142.86	128.93
25	3000	800	3	250	12	40	215	268	81.5	78.30	94.81
26	1100	800	2	250	12	40	206	270	41.4	37.86	45.35

برای مقایسهٔ نتایج حاصل از این پژوهش با سایر مدل‌ها، از راه حل پیشنهادی توسط رابرتز و نیوآرک برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی استفاده می‌شود [10]. براساس نظریهٔ مذکور مقاومت نهایی تیرورق‌ها در برابر بارهای موضعی برابر است با:

$$Pu_9 = 1.1t_w^2\sqrt{E\sigma_w}\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^{0.25}\left(1+\frac{(c+2t_f)t_w}{d_w t_f}\right) \quad (١٦)$$

در این رابطه t_w ضخامت جان، d_w ارتفاع جان، b_w عرض جان، E ضریب کشسان، σ_W حد جاری شدن جان، t_f ضخامت بال، b_f عرض بال، c عرض بارگذاری و P_u مقاومت نهایی تیرورق می‌باشند.

رابطهٔ بالا برروی نمونه‌هایی که برای ارزیابی کارایی مدل‌های SVM (نمونه‌های مجموعه آزمایش) اعمال شده است و مقدار مقاومت نهایی پیش‌بینی شده است. مشخصات نمونه‌های آزمایش و نتایج حاصل از این روش به‌همراه نتایج بهترین مدل ماشین بردار پشتیبان در جدول (٦) خلاصه شده است. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از این روش با مقادیر آزمایشگاهی ضریب همبستگی ۰/۹۹٦ و RMSE=۳۰/۲۵ kN حاصل می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقدار متوسط خطاهای حاصل‌شده از مدل‌های گسترش داده‌شده در این پژوهش بسیار کمتر از روش رابرتز و نیوآرک [10] می‌باشد. بدین ترتیب این مقایسه برتری مدل ماشین بردار پشتیبان را تأیید می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله قابلیت روش ماشین بردار پشتیبان برای پیش‌بینی مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این پژوهش از توابع کرنل پایه‌شعاعی، تابع کرنل پیرسون و چندجمله‌ای برای گسترش مدل‌های غیرخطی بر روی یک مجموعه شامل ۱۲٦ نمونه از اطلاعات اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی بر روی تیرورق‌های تحت اثر بار موضعی استفاده شده است.

بررسی نتایج نشان می‌دهد که مدل ماشین بردار پشتیبان دارای دقت مناسبی در پیش‌بینی بار نهایی تیرورق‌ها در محدوده داده‌های مورد استفاده می‌باشد، به‌طوری‌که در نتایج ارزیابی مدل بهینهٔ گسترش داده‌شده برمبنای تابع کرنل پیرسون برروی داده‌های آزمایش مقادیر R=۰/۹۹۹ و RMSE=۵/۷۹ kN به‌دست آمده‌اند. علاوه بر این حساسیت مدل‌های مختلف به تغییرات پارامترهای طراحی مدل نیز بررسی گردیده است. علاوه بر هم‌بستگی بسیار خوب نتایج مدل‌های SVM با مقادیر واقعی، مقایسه عملکرد این مدل‌ها، با نتایج یک مدل سنتی [10]، برتری مدل‌های ارائه‌شده در این پژوهش را تأیید می‌کند.

نشانه‌ها

t_w	ضخامت جان تیرورق
w	بردار وزن
w_0	بردار وزن بهینه
X	بردار مقادیر ورودی
x_r , x_s	دو بردار پشتیبان
y	مقدار خروجی
$\bar{y}$	میانگین خروجی‌های اندازه‌گیری‌شده
α, α^*	ضرایب لاگرانژ
σ	عرض کرنل پایه‌شعاعی
σ'	عرض تابع کرنل پیرسون
σ_f	حد جاری شدن بال
σ_w	حد جاری شدن جان
σ_{y_j}	انحراف استاندارد خروجی اندازه‌گیری شده
σ_{d_i}	انحراف استاندارد خروجی مدل
ω	فاکتور دنباله در تابع کرنل پیرسون
$\langle , \rangle$	عملگر ضرب داخلی

$\| \|^2$	عملگر نرم بردار
ε	خطای مجاز در تابع تلفات
ζ_i, ζ_i^*	متغیرهای slack
b	بایاس
b_0	مقدار بهینهٔ بایاس
b_f	عرض بال تیرورق
b_w	عرض جان تیرورق
C	عرض بارگذاری
C	پارامتر جریمه یا پارامتر تنظیمی
$C_{y_j d_j}$	کواریانس میان خروجی مدل و خروجی اندازه‌گیری‌شده
d	توان کرنل چندجمله‌ای
d_j	مقدار خروجی مدل
d_w	ارتفاع جان
$\bar{d}$	میانگین خروجی‌های مدل
L	تابع لاگرانژ
l	تعداد نمونه‌ها
m	بعد بردار x
n	تعداد نمونه‌ها (در محاسبهٔ ضریب هم‌بستگی)
P_{ex}	مقاومت نهایی اندازه‌گیری‌شده تیرورق
P_u	مقاومت نهایی تیرورق
P_{up}	مقاومت نهایی پیش‌بینی‌شدهٔ تیرورق
R	مجموعهٔ اعداد حقیقی
t_f	ضخامت بال تیرورق

مراجع

1. Fonseca, E. T., Vellasco, C. G., Andrade, A.L., and Vellasco, B. R. "A Patch Load Parametric Analysis Using Neural Networks", *Journal of Constructional Steel Research* , Vol. 59, pp. 251-267, (2003).

۲. شهابیان، فرزاد و رجبی مشهدی، حبیب، "تخمین مقاومت نهایی تیرورق‌های تحت اثر بارهای موضعی بـه کمـک شـبکه‌هـای عصبی مصنوعی"، نشریه مهندسی عمران و نقشه برداری، دانشکده فنی، دوره ٤٥، شماره ۱، فـروردین ۱۳۹۰، صـفحه ۱۷ تـا ۲۲، (۱۳۹۰).

3. Dibike,Y.B.,Velikov,S., Solomatine, D., and Abbot, M.B. "Model induction with support vector machines-introduction and applications", *J. Comput. Civ. Eng.*, ASCE, No. 3, Vol. 15, pp. 208-216, (2001).

4. Li, C., and, Liu,Q., "Support vector machine based semi-active control of structures: a new control strategy". *Struct. Design Tall Spec. Build.*, Published online in Wiley Interscience (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/tal, pp. 557, (2009).

5. Samui, P., "Support vector machine applied to settlement of shallow foundations on cohesionless soils", Computers and Geotechnics, No. 3, Vol. 35, pp. 419 - 427, (2008).

6. Smola, A. J., and Scolkopf, B., "Tutorial on support vector regression, NeuroCOLT2 technical report series", NC2-TR-1998-03, (1998).

7. Cristianini, N., and Shaw-Taylor, J., "An introduction to support vector machines and other kernel-based learning methods", Cambridge: Cambridge University Press, (2000).

8. Samui, P., Sitharam, T. G., and Kurup, P. U., "OCR prediction using support vector machine based on

piezocone data", *J. Geotech. and Geoenv. Eng., ASCE*, No. 6, Vol. 134, pp. 894-898, (2008).

9. Granath, P., "Serviceability Limit State of I-Shaped Steel Girders Subjected to Patch Loading", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 54, pp. 387-408, (2000).
10. Roberts, T.M, and Newark, A. C. B. "Strength of webs subjected to compressive edge loading", *Journal of Structural Engineering,* No.2, Vol. 123, pp. 176-183, (1997).
11. Markovic, N., and Hajdin, N., "A contribution to the analysis of the behavior of plate girders subjected to patch loading", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 21, pp. 163-173, (1992).
12. Kutmanova, I., and Skaloud, M., "Ultimate limit state of slender steel webs subject to (i) constant an (ii) repeated partial edge loading", *Journal of Constructional Steel Research,* Vol. 21, pp. 147-162, (1992).
13. Roberts, T.M., and Rockey, K.C. "A mechanism solution for predicting the collapse loads of slender plate girders when subjected to in-plane loading", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, No. 1, Vol. 67, pp. 155-175, (1979).
14. Goh, A. T. C., and Goh, S. H., "Support vector machines: their use in geotechnical engineering as illustrated using seismic liquefaction data", *Computers and Geotechnics*, No. 5, Vol. 34, pp. 410–421, (2007).
15. Pooya Nejad, F., Jaksa, M. B., Kakhi, M. and McCabe, B. A., "Prediction of pile settlement using artificial neural networks based on standard penetration test data", *Computers and Geotechnics*, No. 7, Vol. 36, pp. 1125–1133, (2009).
16. Smith, M., "Neural network for statistical modeling", New York; Van Nostrand-Reinhold, (1993).
17. Hecht-Nielson, R., Neurocomputing. Addison-Wesley, Publishing Company, Reading, MA, (1990).